

Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών, Φεβρουάριος 2023

Διδάσκοντες: Χ. Σαρόγλου - Μ. Σταματάκης

Θέμα 1 [1,5 μον.]

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sin x + \sqrt{2} \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Θέμα 2 [1,5 μον.]

Να εξετασθεί αν η έκφραση $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$ είναι ταυτολογία.

Θέμα 3 [1,5 μον.]

Δίνονται δύο σύνολα X, Y . Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι αληθείς.

(i) $\mathcal{P}(X \cup Y) = \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$.

(ii) $\mathcal{P}(X \cup Y) = \{A \cup B : A \in \mathcal{P}(X), B \in \mathcal{P}(Y)\}$.

Θέμα 4 [1,5 μον.]

Στο σύνολο \mathbb{R} ορίζουμε τη σχέση

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η σχέση \sim είναι σχέση ισοδυναμίας.

(ii) Να βρεθεί το σύνολο πηλίκο \mathbb{R} / \sim .

(iii) Έστω ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} / \sim \rightarrow S^1$ με τύπο

$$f([t]) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), [t] \in \mathbb{R} / \sim$$

είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

Θέμα 5 [1,5 μον.]

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$. Υπολογίστε τα σύνολα $f^{-1}(f(A))$ και $f(f^{-1}(A))$, αν $A = [1, \sqrt{2}]$.

Θέμα 6 [1,5 μον.]

Δίνονται τα υποσύνολα του \mathbb{R}

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq -\frac{\pi}{4}\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{5}\}.$$

Για καθένα από αυτά εξετάστε αν είναι άνω, κάτω φραγμένο, αν έχει supremum, infimum, ελάχιστο, μέγιστο στοιχείο και να υπολογίσετε τις τιμές τους (αν υπάρχουν).

Θέμα 7 [1,5 μον.]

Διατυπώστε το θεώρημα των Schröder- Bernstein και αποδείξτε με χρήση αυτού ότι

$$[-2, 1] \cup (3, 4] \cup [5, 9) \simeq \mathbb{R}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ